Ausgewählte Lösungen siehe unten!

Mathematik
Leistungskurs 12
Geometrie/ Algebra

Klausur

1. Gegeben seien die Punkte A(2; 1; 4); B(0; -1; 3); C(-2; -3; 2) und D(1; 4; 1). Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B, die Gerade h verläuft durch die Punkte C und D.
Bestimme die ***Lagebeziehung*** (auch rechnerischer Ansatz!) von g und h! Bestimme gegebenenfalls den ***Schnittpunkt*** und den ***Winkel***, unter dem sich g und h schneiden! (3BE)

2. Gegeben sei ein Viereck ABCD. Notiere die Stücke (Seiten, Winkel, Diagonalen), die ***mindestens*** berechnet werden müssen, um den Nachweis zu führen, dass das Viereck ABCD
a) ein Rechteck
b) ein Rhombus ist! (2BE)

3. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte
A(3; 3; -2); B(5; 7; 2); C(1; 9; 6); D(-1; 5; 2) und P_a(-4; 2a; a) mit $a \in R$ gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene E.
Ermittle je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und in parameterfreier Form!
Für genau einen Wert a liegt der zugehörige Punkt P_a in der Ebene E.
Berechne die Koordinaten dieses Punktes! (4BE)

b) Es existiert mindestens ein Punkt F, so dass die Punkte A, B, C und F Eckpunkte eines Trapezes mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) sind:
(1) $\overline{AB} \parallel \overline{FC}$
(2) eine der beiden parallelen Seiten ist doppelt so lang wie die andere parallele Seite.
Berechne die Koordinaten ***eines*** solchen Punktes F!
Gib an, wie viele Trapeze mit den Eigenschaften (1) und (2) existieren, und ***begründe*** die Feststellung!
Beschreibe, wie die Koordinaten eines von deinem berechneten Punkt F verschiedenen Punktes ermittelt werden können, der ebenfalls die Bedingungen (1) und (2) erfüllt! (4BE)

c) Zeige, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist!
Das Viereck ABCD ist Grundfläche von Pyramiden, die eine Höhe h_p mit $h_p=\sqrt{65}$ haben.
Berechne das Volumen einer solchen Pyramide!
Es gibt Pyramiden, deren Höhen h_p mit $h_p=\sqrt{65}$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-6\\5\end{pmatrix}$ $(t \in R)$ verlaufen und die den Diagonalenschnittpunkt der Grundfläche als Fußpunkt haben.
Ermittle die Koordinaten aller Punkte, die Spitzen dieser Pyramide sein können! (7BE)

Ausgewählte Lösungen:

1. S(-2; -3; 2); $\alpha = 34{,}46°$
2. a) z.B. drei Innenwinkel sind rechte Winkel
3. a) 2x - 6y + 5z = -22; $P_a(-4; 4; 2)$
   b) 4 Punkte F, z.B. $F_1(-3; 1; -2)$
   c) $V = 86{,}\overline{6}$ VE; Diagonalenschnittpunkt M(2; 6; 2) $S_1(4; 0; 7)$; $S_2(0; 12; -3)$